数理解析研究所講究録
1497 巻 2006 年 1-14

Pieri's formula for generalized Schur polynomials

沼田 泰英*(北海道大学大学院理学研究科)
NUMATA, Yasuhide (Hokkaido Univ.)

概要

Generalized Schur operators の展開係数として generalized Schur polynomials を定義する. そこには, Pieri's formula に相当する公式が存在する.

1 Introduction

Young's lattice は Stanley [9] によって導入された differential poset の prototypical な例である. Young's lattice では Robinson 対応と呼ばれる, standard Young tableaux のペアと順列との間の一対一対応が知られているが, この対応は Fomin [3] によって differential poset やその一般化である dual graphs においても構成されている.

さらに, Young's lattice では Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる semi-standard Young tableaux のペアとある行列との間の一対一対応が知られている. Fomin は [4] において generarized Schur operators を導入し, dual graph における Robinson 対応の手法を Robinson-Schensted-Knuth 対応へ拡張した. 我々は, generalized Schur operators を用いて Schur polynomials の一般化に相当する多項式を定義する.

完全対称多項式は, 一行のみからなる Young diagram に対応する Schur 多項式である. i 次完全対称式 h_i と一般の Schur 多項式 s_λ との積は Pieri's formula と呼ばれる等式を満たしている. ここでいう Pieri's formula とは以下のような物である:

$$\sum_{\mu} s_\mu(t_1,\ldots,t_n) = h_i(t_1,\ldots,t_n)s_\lambda(t_1,\ldots,t_n),$$

ただし, 左辺の μ は μ/λ が i 箱からなる horizontal strip になる様な Young diagram を全て動く.

* nu@math.sci.hokudai.ac.jp

この等式に相当する等式が Schur polynomial の一般化に相当する多項式にも成立していることを示す.

2 Definition

この節で, 2 種類の多項式を定義する. 一つは Schur polynomials の一般化に相当するもの (Definition 2.3) であり, もう一つは完全対称多項式に相当するもの (Definition 2.6) である.

2.1 Generalized Schur Operators

まず始めに, Schur polynomials の一般化に相当するものを定義するために, Fomin [4] によって導入された generalized Schur operators を定義する. 我々の多項式は generalized Schur operators の展開係数として定義される.

K を標数 0 の体とする. K は $t, t', t_1, t_2, \ldots$ を変数とする冪級数を含んでいるとする. 添字 $i \in \mathbb{Z}$ に対して, V_i は有限次元 K-ベクトル空間とする. Y_i を V_i の基底とし fix する. $V = \bigoplus_i V_i$, $Y = \bigcup_i Y_i$ とする.

全ての $i < 0$ において, $Y_i = \emptyset$ であり, $Y_0 = \{\varnothing\}$ であるときに, Y は最小元 $\varnothing$ を持つと言う事にする.

$\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle \sum_{\lambda \in Y} c_\lambda \lambda, \sum_{\lambda \in Y} c'_\lambda \lambda \rangle = \sum_{\lambda \in Y} c_\lambda c'_\lambda$ を満たす自然なペアリングとする.

非負整数 $i > 0$ に対し, D_i, U_j を V 上の線形写像とし任意の j に対して $D_i(V_j) \subset V_{j-i}$, $U_i(V_j) \subset V_{j+i}$ を満たしているとする. $\{a_i\}$ を K の元の列とする. 列 $\{A_i\}$ と変数 x に対して, $A(x)$ で母関数 $\sum_{i \geq 0} A_i x^i$ を表す.

Definition 2.1 (generalized Schur operators). 等式 $D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t')$ が成立している時, $D(t_1) \cdots D(t_n)$ と $U(t_n) \cdots U(t_1)$ を, *generalized Schur operators with* $\{a_m\}$ と呼ぶ.

Remark 2.2. $D(t_1) \cdots D(t_n)$ と $U(t_n) \cdots U(t_1)$ を generalized Schur operators with $\{a_i\}$ とし自然なペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ に対応する conjugate を $*$ と書く. このとき, $U^*(t_n) \cdots U^*(t_1)$ と $D^*(t_1) \cdots D^*(t_n)$ は等式 $U^*(t')D^*(t) = a(tt')D^*(t)U^*(t')$ を満たしており generalized Schur operators with $\{a_m\}$ である.

Definition 2.3 (generalized Schur polynomials). $D(t_1) \cdots D(t_n), U(t_n) \cdots U(t_1)$ を generalized Schur operators とする. $\lambda \in V$ と $\mu \in Y$ に対して, $s^D_{\lambda,\mu}(t_1, \ldots, t_n)$ と

$s_U^{\mu,\lambda}(t_1,\ldots,t_n)$ を, それぞれ $D(t_1)\cdots D(t_n)\lambda$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)\lambda$ の μ の係数と定義し *generalized Schur polynomials* と呼ぶことにする.

Generalized Schur polynomials $s^D_{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ は, $D(t)$ と $D(t')$ が可換である時, 即ち $D(t)D(t')=D(t')D(t)$ が成立する時には対称多項式となる.

また定義より, $\lambda,\mu\in Y$ に対して

$$\begin{aligned}s^D_{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n) &= \langle D(t_1)\cdots D(t_n)\lambda,\mu\rangle\\ &= \langle\lambda, D^*(t_n)\cdots D^*(t_1)\mu\rangle\\ &= s_{D^*}^{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n)\end{aligned}$$

が成立している.

Example 2.4. Prototypical な example は Young's lattice $\mathbb{Y}$ である. Y_i を i 箱の Young diagram からなる集合 $\mathbb{Y}_i$ とし, V_i として Y_i を basis とする K-線形空間とする. このとき Young's lattice $\mathbb{Y}$ は 0 箱の Young diagram $\varnothing$ を最小元として持っている.

$\lambda,\mu\in\mathbb{Y}$ に対して, skew Young diagram λ/μ が各列高々 1 箱しか箱を持たない時, λ/μ が *horizontal strip* であるという. また, λ/μ が各行高々 1 箱しか箱を持たない時, λ/μ が *vertical strip* であるという.

D_i を $D_i\mu=\sum_\lambda\lambda$, ただし, λ は μ/λ が i 箱からなる horizontal strip となるような Young diagram を動く, となるように定義する.

また, U_i を $U_i(\mu)=\sum_\lambda\lambda$, ただし, λ は λ/μ が i 箱からなる horizontal strip となるような Young diagram を動く, となるように定義する.

このとき, $\{a_m=1\}$ に対して, $D(t')U(t)=a(tt')U(t)D(t')$ を満たしているので, $D(t_1)\cdots D(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ は generalized Schur operators with $\{1,1,1,\ldots\}$ である.

この時, $\lambda,\mu\in\mathbb{Y}$ に対して, $s^D_{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ と $s_U^{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ は両方ともに skew Schur polynomial $s_{\lambda/\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ である.

Example 2.5. 多項式環 $K[x]$ を K-vector space だと思い V とする. V_i は i 次の多項式からなる空間とする. この時, V_i は 1 次元であり, basis Y_i として $\{x^i\}$ をとることができる. また, このとき $1=x^0$ を最小元として持っている.

D_i と U_i を, $\frac{\partial^i}{i!}$ に $\frac{x^i}{i!}$ より定義する, ただし ∂ は x の偏微分を表す. この様に定義するると $D(t)$ と $U(t)$ はそれぞれ $\exp(t\partial)$ と $\exp(tx)$ となる. $D(t)$ と $U(t)$ は $D(t)U(t')=\exp(tt')D(t)U(t')$ を満たすので, $D(t_1)\cdots D(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ は generalized Schur operators with $\{a_m=\frac{1}{m!}\}$ である.

さらに, ∂ (または x) と t は可換なので, 次が成立している;

$$D(t_1)\cdots D(t_n)=\exp(\partial t_1)\cdots\exp(\partial t_n)=\exp(\partial(t_1+\cdots+t_n)),$$
$$U(t_n)\cdots U(t_1)=\exp(xt_n)\cdots\exp(xt_1)=\exp(x(t_1+\cdots+t_n)).$$

このことから直接計算により,

$$\exp(\partial(t_1+\cdots+t_n))x^i=\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(t_1+\cdots+t_n)^j}{(i-j)!j!}x^{i-j}$$
$$\exp(x(t_1+\cdots+t_n))x^i=\sum_{j}\frac{(t_1+\cdots+t_n)^j}{j!}x^{i+j}$$

となるので

$$s^D_{x^{i+j},x^i}(t_1,\ldots,t_n)=\frac{(i+j)!}{i!j!}(t_1+\ldots+t_n)^j,$$
$$s_U^{x^{i+j},x^i}(t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{j!}(t_1+\ldots+t_n)^j$$

が分かる.

2.2 Weighted Complete Symmetric Polynomials

次に, 完全対称多項式の一般化に相当する多項式を定義する. この多項式は帰納的に定義される.

Definition 2.6. $\{a_m\}$ を K の元の列とする. i-th weighted complete symmetric polynomial $h_i^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)$ を

$$\begin{cases} h_i^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)=\sum_{j=0}^{i}h_j^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_{n-1})h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_n), & (\text{for } n>1)\\ h_i^{\{a_m\}}(t_1)=a_it_1^i & (\text{for } n=1)\end{cases}$$

により定義する.

定義より i-th weighted complete symmetric polynomial $h_i^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)$ は斉次な対称多項式である.

一般に, 冪級数 $\sum_i h_i^{\{a_m\}}(t)$ は 母関数 $a(t)=\sum a_it^i$ に等しいことが定義から分かる. また,

$$a(t_1)\cdots a(t_n)=\sum_i h_i^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)$$

となっている.

Example 2.7. 全ての a_m が 1 のとき, $h_i^{\{1,1,\dots\}}(t_1,\dots,t_n)$ は通常の完全対称多項式 $h_i(t_1,\dots,t_n)$ となる. この場合 $\sum_i h_i(t) = a(t) = \sum_i t^i = \frac{1}{1-t}$ である.

Example 2.8. 非負整数 m に対して, $a_m = \frac{1}{m!}$ のとき, $h_i^{\{\frac{1}{m!}\}}(t_1,\dots,t_n) = \frac{1}{i!}(t_1+\cdots+t_n)^i$ であり $\sum_i h_i^{\{\frac{1}{m!}\}}(t) = a(t) = \exp(t)$ である.

3 Main Results

この節で, generalized Schur polynomials と weighted complete symmetric polynomials のいくつかの性質を示す: 最小元を持つときには, weighted complete symmetric polynomials が generalized Schur polynomials のうちの特別な物として書き表すことができること (Proposition 3.2) を示す. また, 主結果である, 一般の generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula (Theorem 3.5) や, いくつかのバリエーション (Teorem 3.10) も与える. さらに, 一般の generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula の系として得られる, 最小元を持つ場合の Pieri's formula (Corollary 3.6) を与える.

3.1 Pieri's Formula

まず, U_i と $D(t_1)\cdots D(t_n)$ の交換関係を観察する. この交換関係から主結果である一般の generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula (Theorem 3.5) は導かれる. また, V が最小元を持つときには weighted complete symmetric polynomials が generalized Schur polynomials の和として書けること (Proposition 3.2) もこの交換関係から導かれる.

Proposition 3.1. $D(t_1)\cdots D(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ を *generalized Schur operators with* $\{a_m\}$ とする. このとき任意の i に対して

$$D(t_1)\cdots D(t_n)U_i = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1,\dots,t_n)U_j D(t_1)\cdots D(t_n)$$

が成立する.

Proof. 証明の方針のみ述べる. Generlized Schur operators with $\{a_m\}$ の満たすべき式

$$D(t)U(t') = a(tt')U(t')D(t)$$

から, $D(t)U_i = \sum_{j=0}^{i} a_j t^j U_{i-j} D(t)$ がいえる. また同様に,

$$D(t_1)\cdots D(t_n)U_i = \sum_{j=0}^{i} H_{i,j}(t_1,\ldots,t_n)U_j D(t_1)\cdots D(t_n)$$

としたとき, $H_{i,j}(t_1,\ldots,t_n)$ が $h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)$ と同じ漸化式を満たしている事がいえ, これらからこの Proposition が示される. □

この Proposition から, 最小元 $\varnothing$ がある時には, weighted complete symmetric polynomials は次の Proposition 3.2 のように generalized Schur polynomials の線形結合として書けることがわかる.

Proposition 3.2. $\varnothing$ を最小元とし, $D(t_1)\cdots D(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ が *generalized Schur operators with* $\{a_m\}$ とすると, 任意の $i \geq 0$ で次の等式が成立している:

$$s_{U_i\varnothing,\varnothing}^{D}(t_1,\ldots,t_n) = h_i^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)d_0^m u_0,$$

ただし, $u_0 \in K$ と $d_0 \in K$ は $U_0\varnothing = u_0\varnothing$, $D_0\varnothing = d_0\varnothing$ を満たすものとする.

Proof. 証明の方針のみ述べる. $D(t_1)\cdots D(t_n)U_i\varnothing$ における $\varnothing$ の係数を比較する事で Proposition 3.1 から示す事ができる. □

Example 3.3. Young's lattice $\mathbb{Y}$ の場合, Proposition 3.2 は 1 行からなる Young diagram に対応する Schur polynomial $s_{(i)}$ が完全対称多項式 h_i であることを表している.

Example 3.4. $K[x]$ の例の場合, Proposition 3.2 は $\exp(\partial(t_1+\cdots+t_n))\cdot\frac{x^i}{i!}$ での x^0 の係数が $\frac{(t_1+\cdots+t_n)^i}{i!}$ であることを表している.

一般の場合 (最小元を持つとは限らない場合) を考える. Proposition 3.1 より, $\lambda \in V$ と $\mu \in Y$ に対して

$$\langle D(t_1)\cdots D(t_n)U_i\lambda,\mu\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n)U_j D(t_1)\cdots D(t_n)\lambda,\mu \right\rangle$$

が言える. この等式により Theorem 3.5 が従う.

Theorem 3.5 (Pieri's formula). $\mu \in Y_k$ と $\lambda \in V$ に対して, *generalized Schur operators* は

$$s_{U_i\lambda,\mu}^{D}(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1,\ldots,t_n) \sum_{\nu(\in Y_{k-j})} \langle U_j\nu,\mu\rangle s_{\lambda,\nu}^{D}(t_1,\ldots,t_n)$$

を満たす.

更に最小元 $\varnothing$ があるのであれば, 次の系を得る.

Corollary 3.6. $\lambda \in V$ に対して, 次の等式が成り立つ;

$$\begin{aligned} s^D_{U_i\lambda,\varnothing}(t_1,\dots,t_n) &= h_i^{\{a_m\}}(t_1,\dots,t_n)u_0 s^D_{\lambda,\varnothing}(t_1,\dots,t_n) \\ &= s^D_{U_i\varnothing,\varnothing}(t_1,\dots,t_n)u_0 s^D_{\lambda,\varnothing}(t_1,\dots,t_n), \end{aligned}$$

ただし, $u_0 \in K$ は $U_0\varnothing = u_0\varnothing$ を満たすものとする.

Example 3.7. Young's lattice $\mathbb{Y}$ の場合, Young diagram $\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して, $U_i\lambda$ は κ/λ が i 箱からなる horizontal strip となるような Young diagrams κ の和である. 従って $s^D_{U_i\lambda,\varnothing}(t_1,\dots,t_n) = \sum_\kappa s_\kappa(t_1,\dots,t_n)$, ただし右辺の和は κ/λ が i 箱からなる horizontal strip となるような Young diagrams κ を動く. 一方で $u_0 = 1$, $h_i^{\{a_m\}}(t_1,\dots,t_n) = h_i(t_1,\dots,t_n)$ であるので, Corollary 3.6 の右辺は $h_i(t_1,\dots,t_n)s_\lambda(t_1,\dots,t_n)$ となり, Corollary 3.6 は通常の Pieri's formula に他ならない. さらに Theorem 3.5 は skew Schur polynomials に対する Pieri's formula である: 即ち, skew Young diagram λ/μ と $i \in \mathbb{N}$ に対し, 次が成立している;

$$\sum_\kappa s_{\kappa/\mu}(t_1,\dots,t_n) = \sum_{j=0}^{i}\sum_\nu h_{i-j}(t_1,\dots,t_n)s_{\lambda/\nu}(t_1,\dots,t_n),$$

ただし左辺の和は κ/λ が i 箱の horizontal strip になる様な κ を動く; 右辺の和は μ/ν が j 箱の horizontal strip になる様な ν を動く.

3.2 Some Variations of Pieri's Formula

ここでは, generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula のいくつかのバリエーションを見る.

次の Proposition は Proposition 3.1 に $*$ を施す事などにより従う.

Proposition 3.8. $D(t_1)\cdots D(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ を *generalized Schur operators with* $\{a_i\}$ とする. このとき次が成立する:

$$D_iU(t_n)\cdots U(t_1) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1,\dots,t_n)U(t_n)\cdots U(t_1)D_j,$$

$$U_i^* D(t_n)^* \cdots D^*(t_1) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) D^*(t_n) \cdots D^*(t_1) U_j^*,$$

$$U^*(t_1) \cdots U^*(t_n) D_i^* = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) D_j^* U^*(t_1) \cdots U^*(t_n).$$

この proposition から Corollary 3.2, Theorem 3.5, Corollary 3.6 のバリエーションが導かれる. Corollary 3.2, Theorem 3.5, Corollary 3.6 と同様の方法で証明できる.

Proposition 3.9. $D(t_1) \cdots D(t_n)$ と $U(t_n) \cdots U(t_1)$ を *generalized Schur operators with* $\{a_i\}$ とし, $\varnothing$ が最小元であるとする. このとき, 次が成立する:

$$s_{D_i^* \varnothing, \varnothing}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n) = h_i^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) u_0^n d_0,$$

ただし, $u_0 \in K$ と $d_0 \in K$ は $U_0 \varnothing = u_0 \varnothing$, $D_0 \varnothing = d_0 \varnothing$ を満たすものとする.

Theorem 3.10 (variations of Pieri's formula). 任意の $\mu \in Y_k$ と $\lambda \in V$ に対して, *generalized Schur polynomials* は次を満たす:

$$\sum_{\kappa \in Y} \langle D_i \kappa, \mu \rangle s_U^{\kappa, \lambda}(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) s_U^{\mu, D_j \lambda}(t_1, \ldots, t_n),$$

$$s_{D_i^* \lambda, \mu}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) \sum_{\nu (\in Y_{k-j})} \langle D_j^* \nu, \mu \rangle s_{\lambda, \nu}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n),$$

$$\sum_{\kappa \in Y} \langle U_i^* \kappa, \mu \rangle s_{D^*}^{\kappa, \lambda}(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) s_{D^*}^{\mu, U_j^* \lambda}(t_1, \ldots, t_n).$$

Corollary 3.11. 任意の $\lambda \in V$ に対して, 次が成立する:

$$\begin{aligned} s_{D_i^* \lambda, \varnothing}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n) &= h_i^{\{a_m\}}(t_1, \ldots, t_n) d_0 s_{\lambda, \varnothing}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n) \\ &= s_{D_i^* \varnothing, \varnothing}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n) d_0 s_{\lambda, \varnothing}^{U^*}(t_1, \ldots, t_n), \end{aligned}$$

ただし, $d_0 \in K$ は $D_0 \varnothing = d_0 \varnothing$ を満たすものとする.

4 More Examples

この節では, generalized Schur operators の例を挙げる.

4.1 Shifted Shapes

Fomin [4, Example 2.1] と同じ例を考える. Y を shifted shapes 全体からなる集合とする. (i.e., Y を $\{\{(i,j)|i \le j < \lambda_i + i\}|\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots), \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\}$ とする.)

D_i を $\lambda \in Y$ に対して,

$$D_i\lambda = \sum_{\nu} 2^{cc_0(\lambda/\nu)}\nu,$$

(ただし $cc_0(\lambda/\nu)$ は main diagonal を含まない λ/ν の連結な component の数とし, 和は λ/ν が i 箱からなる horizontal strip となるような ν を全て動くもとする) となるように定義する.

U_i は $\lambda \in Y$ に対して

$$U_i\lambda = \sum_{\mu} 2^{cc(\mu/\lambda)}\mu,$$

(ただし $cc(\lambda \setminus \mu)$ は λ/μ の連結な component の数とし, 和は μ/λ が i 箱からなる horizontal strip となるような μ を全て動くもとする) となる様に定義する.

この時 $D(t)$ と $U(t)$ は

$$D(t')U(t) = \frac{1+tt'}{1-tt'}U(t)D(t')$$

を満たしているので, $D(t_1)\cdots D(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ は generalized Schur operators with $\{1,2,2,2,\ldots\}$ である. この場合, $\lambda, \mu \in Y$ に対して, generalized Schur polynomials $s^D_{\lambda,\mu}$ と $s^{\lambda,\mu}_U$ はそれぞれ $Q_{\lambda/\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ と $P_{\lambda/\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ となる, ただしここで $P\cdots$ と $Q\cdots$ は shifted skew Schur polynomials を表す.

この場合, Corollary 3.2 は

$$h_i^{\{1,2,2,2,\ldots\}}(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} 2Q_{(i)}(t_1,\ldots,t_n) & i > 0 \\ Q_{\varnothing}(t_1,\ldots,t_n) & i = 0 \end{cases}$$

を意味する. また Corollary 3.9 より

$$h_i^{\{1,2,2,2,\ldots\}}(t_1,\ldots,t_n) = P_{(i)}(t_1,\ldots,t_n)$$

が分かる.

Corollary 3.6 は次を満たす:

$$h_i^{\{1,2,2,2,\ldots\}}Q_\lambda(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{\mu} 2^{cc(\lambda\setminus\mu)}Q_\mu(t_1,\ldots,t_n),$$

ただし和は λ/μ が i 箱からなる horizontal strip となるような μ を全て動くもとする)

4.2 Young's Lattice: Dual Identities

次に Fomin [4, Example 2.4] と同じ例を考える. Y として, Young's lattice を考える. U_i は Example 2.4 で考えた物と同じ物とする, (i.e., $U_i\lambda = \sum_\mu \mu$, ただし μ は μ/λ が i 箱の horizontal strip となるように動く.)

D'_i を $\lambda \in Y$ に対して, $D'_i\lambda = \sum_\mu \mu$, ただし μ は λ/μ が i 箱の vertical strip となるように動く, と定義する.

このとき $D'(t)$ と $U(t)$ は

$$D'(t')U(t) = (1+tt')U(t)D'(t')$$

を満たすので, $D'(t_1)\cdots D'(t_n)$ と $U(t_n)\cdots U(t_1)$ は generalized Schur operators with $\{1,1,0,0,0,\ldots\}$ である. このとき λ, $\mu \in Y$ に対して, generalized Schur polynomials $s^{D'}_{\lambda,\mu}$ は $s_{\lambda'/\mu'}(t_1,\ldots,t_n)$ に等しい, ただし λ' と μ' は λ と μ の転置を表し, $s_{\lambda'/\mu'}(t_1,\ldots,t_n)$ は shifted Schur polynomials を表すとする.

この時, Corollary 3.2 は次を意味する:

$$h_i^{\{1,1,0,0,0,\ldots\}}(t_1,\ldots,t_n) = s_{(1^i)}(t_1,\ldots,t_n) = e_i(t_1,\ldots,t_n),$$

ただし $e_i(t_1,\ldots,t_n)$ は i 次基本対称多項式を表す.

Cororally 3.6 は次のようになる:

$$\sum_\mu s_\mu(t_1,\ldots,t_n) = e_i(t_1,\ldots,t_n)s_\lambda(t_1,\ldots,t_n),$$

ただし μ は λ/μ が i 箱の vertical strip となるように動く.

Skew Young diagram λ/μ に対して, Theorem 3.10 は次を意味する:

$$\sum_\kappa s_{\kappa/\mu}(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{j=0}^{i}\sum_\nu e_{i-j}(t_1,\ldots,t_n)s_{\lambda/\nu}(t_1,\ldots,t_n),$$

ただし κ は κ/λ が i 箱の vertical strip となるように, ν は μ/ν が j 箱の vertical strip となるように動く.

4.3 Planar Binary Trees

F を alphabet $\{1,2\}$ で生成される word 全体からなる集合とする. 長さ 0 のワードを 0 と書く事にする. $v, w \in F$ に対して $v \leq vw$ とする事で F は poset となる. Poset F の

ideal T (i.e., $v \in T$ と $w \in F$ に対して $w \in v$ なら $w \in T$ となっている集合) を *tree* と呼ぶことにする. Tree T の元 $w \in T$ を tree の node と呼ぶ. Y_i を i 個の node からなる tree 全体の集合とする. V を basis が Y であるような K-線形空間とする.

$T \in Y$, $v \in F$ に対して, $T_v = \{w \in T | v \leq w\}$ とする.

Definition 4.1. T を tree, m を正の整数とする. 写像 $\varphi : T \to \{1, \ldots, m\}$ が

- $\varphi(w) < \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{w1}$
- $\varphi(w) \leq \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{w2}$

を満たしている時に, φ を *left-strictly-increasing labeling* と呼ぶ.

また

- $\varphi(w) \leq \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{w1}$
- $\varphi(w) < \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{w2}$

を満たしている時に, *right-strictly-increasing labeling* と呼ぶ.

さらに,

- $\varphi(w) \geq \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{w1}$
- $\varphi(w) < \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{w2}$

を満たしている時には *binary-searching labeling* と呼ぶ.

まず, increasing labeling の trees の列としての表示を与える.

$T \in Y$ に対して, node $w \in T$ が $T_w \subset \{w1^n | n \in \mathbb{N}\}$ を満たしている時に, w を T の *l-node* と呼ぶ. また $T_w \subset \{w2^n | n \in \mathbb{N}\}$ である時に, *r-node* という.

Increasing labeling φ の定義から, 任意の n に対して, 逆像 $\varphi^{-1}(\{1, \ldots, n\})$ は tree である. Right-strictly-increasing labeling φ に対して, $\varphi^{-1}(\{1, \ldots, n+1\}) \setminus \varphi^{-1}(\{1, \ldots, n\})$ の元は $\varphi^{-1}(\{1, \ldots, n+1\})$ の l-node である. また left-strictly-increasing labeling φ に対しては, $\varphi^{-1}(\{1, \ldots, n+1\}) \setminus \varphi^{-1}(\{1, \ldots, n\})$ の元は $\varphi^{-1}(\{1, \ldots, n+1\})$ の r-nodes である.

従って, right-strictly-increasing labeling は $T^{i+1} \setminus T^i$ が T^{i+1} の l-nodes からなる $m+1$ 個の trees からなる列 $(\emptyset = T^0, T^1, \ldots, T^m)$ と同一視することができる. 同様に, left-strictly-increasing labelings は $T^{i+1} \setminus T^i$ が T^{i+1} の r-nodes からなる $m+1$ 個の trees からなる列 $(\emptyset = T^0, T^1, \ldots, T^m)$ と同一視することができる.

V 上の線形写像 D と D' を

$$DT = \sum_{T' \subset T;\ T \setminus T' \text{ consists of some l-nodes}} T',$$

$$D'T = \sum_{T' \subset T;\ T \setminus T' \text{ consists of some r-nodes}} T'.$$

となるように定義する.

次に binary-searching trees について考える.

Tree T に対して, s_T を $\{w \in T | w = v1w' \Rightarrow v2 \notin T.\ w2 \notin T.\}$ とする. 集合 s_T は chain である. s_T の ideal s に対して, tree $T \ominus s$ を

$$T \ominus s = \begin{cases} T & (s = \emptyset) \\ (T - \max(s)) \ominus (s \setminus \{\max(s)\}) & (s \neq \emptyset), \end{cases}$$

ただし $w2 \notin T$ である $w \in T$ に対して

$$T - w = (T \setminus T_w) \cup \{wv | w1v \in T_w\}$$

とする. $T - w$ から T への自然な inclusion $\bar{\nu}$ が次のように定義される.

$$\bar{\nu}(v') = \begin{cases} w1v & v' = wv \in T_w \\ v' & v' \notin T_w. \end{cases}$$

この inclusion $\bar{\nu}$ から, inclusion $\nu : T \ominus s \to T$ が導かれる.

Tree T から $\{1, \ldots, m\}$ への Binary-searching labeling φ は, その定義から, 逆像 $\varphi^{-1}(\{m\})$ が s_T の ideal であることが分かる. Inclusion $\nu : T \ominus \varphi^{-1}(\{m\}) \to T$ と φ から作られる写像 $\varphi \circ \nu$ は, $T \ominus \varphi^{-1}(\{m\})$ から $\{1, \ldots, m-1\}$ への binary-searching labeling となっている.

従ってこの方法により, binary-searching labelings φ と, $m+1$ 個の trees の列 $(\emptyset = T^0, T^1, \ldots, T^m)$ であって各 i に対して $T^i = T^{i+1} \ominus s$ を満たすような $s_{T^{i+1}}$ の ideal$s$ が存在するものを同一視することができる.

V 上の線形写像 U を

$$UT = \sum_{s;\ s_T \text{ の ideal}} T \ominus s$$

となるように定義する.

$D(t')$, $D'(t')$, $U(t)$ は次の等式を満たす:

$$D(t')U(t) = \frac{1}{1 - tt'} U(t) D(t'),$$

$$D'(t')U(t) = (1+tt')U(t)D'(t').$$

よってこれらの operator から構成される generalized Schur polynomials は Young's lattice の場合と同様の Pieri's formula を満たしている.

しかしながら, この場合 generalized Schur polynomials は, 一般に対称多項式ではない. 例えば,

$$\begin{aligned}
&U^*(t_1)U^*(t_2)\{0,1,12\}\\
&= U^*(t_1)(\{0,1,12\} + t_2\{0,2\} + t_2^2\{0\})\\
&= (\{0,1,12\} + t_1\{0,2\} + t_1^2\{0\}) + t_2(\{0,2\} + t_1\{0\}) + t_2^2(\{0\} + t_1\emptyset)\\
&= \{0,1,12\} + (t_1+t_2)\{0,2\} + (t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)\{0\} + t_1t_2^2\emptyset
\end{aligned}$$

であるので, $s^{U^*}_{\{0,1,12\},\emptyset}(t_1,t_2) = s_U^{\{0,1,12\},\emptyset}(t_1,t_2) = t_1t_2^2$ となり対称多項式ではない.

T から $\{1,\ldots,m\}$ への labeling φ に対して, $t^\varphi = \prod_{w\in T} t_{\varphi(w)}$ と定義すると, tree T に対して,

$$\begin{aligned}
s_U^{T,\emptyset}(t_1,\ldots,t_n) &= \sum_{\varphi;\text{ a binary-searching labeling}} t^\varphi,\\
s^D_{T,\emptyset}(t_1,\ldots,t_n) &= \sum_{\varphi;\text{ a right-strictly-increasing labeling}} t^\varphi,\\
s^{D'}_{T,\emptyset}(t_1,\ldots,t_n) &= \sum_{\varphi;\text{ a left-strictly-increasing labeling}} t^\varphi
\end{aligned}$$

となっている.

参考文献

[1] Fomin,S., Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence, Zar. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 155(1986), 156–175,195 (Russian); English transl., J.Soviet Math. 41(1988), pp. 979–991.

[2] Fomin,S., Duality of graded graphs, J. Algebraic Combin. 3 (1994) 357-404.

[3] Fomin,S., Schensted algorithms for dual graded graphs, J. Algebraic Combin. 4(1995), pp. 5–45.

[4] Fomin,S., Schur Operators and Knuth Correspondences, J. Combin. Theory Ser. A. 72(1995),277-292.

[5] Fulton,W., Young Tableaux; with applications to representation theory and geometry, volume 35 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, New York, 1997.

[6] Gessel,Ira M., Counting paths in Young's lattice, J. Statistical Planning and Inference. 34(1993), pp. 125–134.

[7] Hivert, F., Novelli, J., and Thibon, J., The algebra of binary search trees. Theor. Comput. Sci. 339, 1 (Jun. 2005), 129-165.

[8] Roby,T., Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets, Ph.D.thesis, M.I.T., 1991.

[9] Stanley,R., Differential posets, J. Amer. Math. Soc, 1(1988), pp. 919–961.

[10] Stanley,R., Variations on differential posets, Invariant theory and tableaux (Stanton,D.,ed.), IMA volumes in mathematics and its applications, Springer-Verlag, New York, pp. 145–165.